ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

មេរៀនសង្ខេប

មុខវិជ្ជា៖ គណិតវិទ្យា

សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
និងបំពេញវិជ្ជាលើកទី២

សម័យប្រឡង ១៣ តុលា ២០១៤

បញ្ជីអត្ថបទ

លីមីតនៃអនុគមន៍..3

I. មេរៀនសង្ខេប..3

1.ប្រមាណវិធីលើលីមីត 3

2. លីមីតនៃអនុគមន៍ជួបប្រទះញឹកញាប់................................4

3. លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ.....................................4

4. លីមីតនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល 4

5. លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ 4

ដេរីវេ និង ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ 15

I.មេរៀនសង្ខេប..15

1.ដេរីវេនៃអនុគមន៍ 15

2.ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ 19

II. លំហាត់គំរូ..21

ចំនួនកុំផ្លិច 29

I. មេរៀនសង្ខេប 29

II.លំហាត់គំរូ...30

កោនិក 39

I.មេរៀនសង្ខេប...39

1.ប៉ារ៉ាបូល...39

2.អេលីប 40

3.អ៊ីពែបូល...41

II.លំហាត់គំរូ...42

លីមីតនៃអនុគមន៍

I. មេរៀនសង្ខេប

1.ប្រមាណវិធីលើលីមីត

បើ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L\neq 0$	$L\neq 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
បើ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$M\neq 0$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
នោះ $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$	$L+M$	L	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$+\infty$	?	$-\infty$
នោះ $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x).g(x)\right)$	$L.M$	0	$\pm\infty$	?	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
នោះ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{L}{M}$	$\pm\infty$	0	0	?	?	?	?

កំណត់សំគាល់ : រាងមិនកំណត់គឺ : $\ll \infty-\infty \gg ; \ll \infty\times 0 \gg ; \ll \dfrac{0}{0} \gg ; \ll \dfrac{\infty}{\infty} \gg$

2. លីមីតនៃអនុគមន៍ជួបប្រទះញឹកញាប់

លីមីតត្រង់ $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

លីមីតត្រង់ 0

n ជាចំនួនគត់រឺឡាទីបវិជ្ជមាន និងគូ $\lim_{\substack{x\to0 \\ x<0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$

n ជាចំនួនគត់រឺឡាទីបវិជ្ជមាន និងសេស $\lim_{\substack{x\to0 \\ x<0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$

n ជាចំនួនគត់រឺឡាទីបវិជ្ជមាន និងសេស $\lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$

3. លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

4. លីមីតនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

បើ $n>0$ នោះ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ និង $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

5. លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \; ; \; \lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \; ; \; \lim_{x\to0} x\ln x = 0$$

បើ $n>0$ នោះ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \; ; \; \lim_{x\to0^+} x^n \ln x = 0$

II. លំហាត់គំរូ

1. $f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{x^2+1}$; គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ចម្លើយ

a. ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$; $f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{x^2+1}=\dfrac{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$

b. គេបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)=2$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$

វិបាក $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

2. $f(x)=\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$

គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

ចម្លើយ

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x}{(1+x)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x}{1+2x+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{x}\right)=0$

ខ. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{(1+x)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{1+2x+x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-1}{x}\right)=0$

facebook.com/moeys.gov.kh www.moeys.gov.kh google.com/+moeys

គ. $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{1-x}{(1+x)^2}$

$\lim_{x\to -1}(1-x) = 2$ និង $\lim_{x\to -1}(1+x)^2 = 0$

ដោយ $(1+x)^2 > 0$ ចំពោះ $x \neq 0$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$

3.គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; ខ. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8}$; គ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$

ចម្លើយ

ក. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$

ខ. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8}$

យើងដឹងថា $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

ដូច្នេះ $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$

តាង $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8} = \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)}$

$$= \frac{x+2-4}{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \frac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \frac{1}{(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{48}$$

គ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$

តាង $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}=\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\sin x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$

$$=\frac{2x}{\sin x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} \quad ;\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\right)$$

$$=1$$

4.គណនា $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

យើងឃើញ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-1}=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{x^2-1}\right)=-\infty$

ជារាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$

$x\to+\infty$ យើងឧបមា $x\ge 1$

$$\sqrt{4x^2-1}=\sqrt{x^2\left(4-\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}$$

ដោយ $x\ge 1$; $|x|=x$ និង $\sqrt{4x^2-1}=x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}$

ដូចគ្នាដែរ $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

ដូច្នេះ $f(x)=\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{x^2-1}=x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

$$=x\left(\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=2-1=1$

វិបាក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

5.កំណត់លីមីតត្រង់ -1 នៃអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}\setminus\{-1;+1\}$

ដោយ $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

ក. $\lim\limits_{x\to-1}(3x-1)=-4$; $\lim\limits_{x\to-1}(x^2-1)=0$

ខ.សិក្សាសញ្ញា នៃ x^2-1 ដោយប្រើតារាងខាងក្រោម

x	$-\infty$		1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

គ. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}(x^2-1)=0^+$ និង $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}(x^2-1)=0^-$

វិបាក $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=+\infty$

6. លំហាត់គំរូ

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{5x}$ យើងតាង $X=5x$

គេបាន $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\sin X}{X}=1$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=1$

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{-2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

តាង $X=x-\dfrac{\pi}{4}$; $x\to\dfrac{\pi}{4}$ នោះ $X\to0$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = -2\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X} = -2\times 1 = -2$

គ. គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x}{\sqrt{5}-\sqrt{x+5}} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{x+5}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)}{-x}$$

$$= \lim_{x\to 0}(10\times\frac{\sin 5x}{5x})\cdot\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)$$

$$= 10\times 2\sqrt{5} = 20\sqrt{5}$$

ឃ. គណនា $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}cosx - sinx}{x-\frac{\pi}{3}}$

យើងបាន $\sqrt{3}cosx - sinx = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cosx - \frac{1}{2}sinx\right)$

$$= 2\left(sin\frac{\pi}{3}cosx - cos\frac{\pi}{3}sinx\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = -2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}cosx - sinx}{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(-2\frac{sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}\right)$$

តាង $X = x-\frac{\pi}{3}$; $x\to\frac{\pi}{3}$ នាំអោយ $X\to 0$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}cosx - sinx}{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} = \lim_{X\to 0}\left(-2\frac{sinX}{X}\right) = -2\lim_{X\to 0}\frac{sinX}{X} = -2$

facebook.com/moeys.gov.kh www.moeys.gov.kh google.com/+moeys

7. លំហាត់គំរូ

ក.គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{2x}$ យើងតាង $X=2x$

$$\lim_{X\to 0}\frac{\cos X-1}{X}=\lim_{X\to 0}\frac{-(1-\cos X)}{X}=-\lim_{X\to 0}\frac{1-\cos X}{X}=0$$

ខ.គណនា $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

យើងតាង $X=x-\frac{\pi}{2}$; បើ $x\to\frac{\pi}{2}$ នាំអោយ $X\to 0$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\lim_{X\to 0}\frac{\cos X-1}{-X}=\lim_{X\to 0}\frac{1-\cos X}{X}=0$

គ. គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$

$\cos x+1\neq 0$ ឬ $\cos x\neq -1$ ឬ $x\neq\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

យើងបាន $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$

8.លំហាត់គំរូ

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

a. $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right)$

b. $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-\ln x\right)$

c. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{x}\right)$

d. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x^2}$

ចម្លើយ

a. តាង $f(x)=x^2+\ln x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b. តាង $f(x)=x^2-\ln x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} (-\ln x)=-\infty$

វាមានរាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$

$$f(x)=x^2-\ln x=x^2\left(1-\frac{\ln x}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2.\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x^2}\right)$$

$$=+\infty\cdot 1 \qquad \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0\right)$$

$$=+\infty$$

c. តាង $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ កំណត់លើ $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\ln x\times\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\ln x\times\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}$$

$$=-\infty\times+\infty=-\infty$$

d. តាង $f(x)=\dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$ កំណត់លើ $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^3=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

វាមានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

ដើម្បីគណនាលីមីតនេះយើងតាង $x=X^{\frac{3}{2}}$ ដូច្នេះ $X=x^{\frac{2}{3}}$

និង $\lim\limits_{x\to+\infty} X=+\infty$

$$f(x)=\frac{(lnX^{\frac{3}{2}})^3}{\left(X^{\frac{3}{2}}\right)^2}=\frac{\left(\frac{3}{2}\,lnX\right)^3}{X^3}=\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{lnX}{X}\right)^3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{lnX}{X}\right)^3$$

តែ $\lim_{X\to+\infty}\frac{lnX}{X}=0$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

9.លំហាត់គំរូ

a. $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-x+1\right)$

b. $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2}$

c. $\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{x}$

d. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}$

ចម្លើយ

a. តាង $f(x)=e^x-x+1$

$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}(-x+1)=-\infty$

វាមានរាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$

$$f(x)=e^x-x+1=e^x\left(1-\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} e^x\times\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)=1$; $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b. $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2}$

តាង $f(x)=\frac{e^x}{x^2}=e^x\times\frac{1}{x^2}$

តែ $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ និង $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

c. តាង $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{x}$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{x}=\lim_{x\to0}(e^x+e^{-x})\times\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$$

$\lim_{x\to0}(e^x+e^{-x})=2$ និង $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$

យើងបាន $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to0}(e^x+e^{-x})=2$ និង $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$

យើងបាន $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty$

d. តាង $f(x)=\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)$$

តែ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ និង $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$

យើងបាន $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ដេរីវេ និង ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍

I.មេរៀនសង្ខេប

1.ដេរីវេនៃអនុគមន៍

a.រូបមន្តលើដេរីវេ

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍	$f(x)$	$f'(x)$
$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$	a	0
	$ax+b$	a
	ax^2+bx+c	$2ax+b$
	$x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}
$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$D_f = [0,+\infty[$ និង $D_{f'} =]0,+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

facebook.com/moeys.gov.kh www.moeys.gov.kh google.com/+moeys

លក្ខខ័ណ្ឌ	អនុគមន៍	អនុគមន៍មានដេរីវេ កំណត់លើចន្លោះ I
អនុគមន៍ u និង v មានដេរីវេ នៅលើចន្លោះ I និង λ ចំនួនថេរ	$u+v$	$u'+v'$
	$u.v$	$u'.v+u.v'$
	$\lambda.u$	$\lambda.u'$
អនុគមន៍ u និង v មានដេរីវេ នៅលើចន្លោះ I និង $v\neq 0$ លើ I	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$
អនុគមន៍បណ្តាក់: u មានដេរីវេលើ I, v មានដេរីវេលើ $u(I)$	$v\circ u$	$(v'\circ u)\times u'$
u មានដេរីវេលើ I , $u>0$ លើ I	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
-បើ n ជាចំនួនគត់ >0 , u មានដេរីវេលើ I -បើ n ជាចំនួនគត់ <0 , u មានដេរីវេ និង$u\neq 0$ លើ I	u^n $(n\in\mathbb{Z}^*)$	$nu^{n-1}.u'$

b.ដេរីវេ នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ដែនកំណត់	$f(x)$	$f'(x)$
$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$	$cosx$	$-sinx$
	$sinx$	$cosx$
$D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$tanx$	$1 + tan^2x = \frac{1}{cos^2x}$
$D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$cotx$	$-(1 + cot^2x) = -\frac{1}{sin^2x}$
	$sinu$	$u'cosu$
	$cosu$	$-u'sinu$
	$tanu$	$u'(1 + tan^2u) = \frac{u'}{cos^2u}$

	$cotu$	$-u'(1+cot^2u)=\frac{u'}{sin^2u}$

C.ដេរីវេ នៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង លោការីតនេពែ

ដែនកំណត់	$f(x)$	$f'(x)$
$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$	e^x	e^x
	e^u	$u'e^u$
$D_f =]0,+\infty[$	lnx	$\frac{1}{x}$
	lnu	$\frac{u'}{u}$

2.ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍

a.ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ជួបប្រទះញឹកញាប់

អនុគមន៍ $f(x)$	ព្រីមីទីវ $F(x)$
$f(x) = 0$	$F(x) = k$
$f(x) = a$	$F(x) = ax + b$
$f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad (n \geq 2)$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = ln\|x\| + k$

$a \neq 0, f(x) = cos(ax+b)$	$F(x) = \frac{1}{a} sin(ax+b) + k$
$a \neq 0, f(x) = sin(ax+b)$	$F(x) = -\frac{1}{a} cos(ax+b) + k$
$f(x) = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tan^2 x$	$F(x) = tanx + k$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$

b.ប្រមាណវិធីលើព្រីមីទីវ

អនុគមន៍	ព្រីមីទីវ
$f + g$	$F + G + c$
λf	$\lambda F + c$
$u'v + uv'$	$uv + c$
$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v} + c$

$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u + c$
$u^n u'$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{u'}{u^n}\ (n \geq 2)$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$

II. លំហាត់គំរូ

1.គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = 3x^3 - 4x + 2$ ខ.$f(x) = (2x-1)^5$

គ.$f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ឃ. $f(x) = x(x + \sqrt{1+x^2})$

ចម្លើយ

ក. $f(x) = 3x^3 - 4x + 2$ យើងបាន $f'(x) = 9x^2 - 4$

ខ. $f(x) = (2x-1)^5$ យើងតាង $u = 2x - 1$ ឬ $u' = 2$

$f(x) = u^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5u^{5-1}.u' = 5u^4 \times 2 = 10u^4$

ឬ $f'(x) = 10(2x-1)^4$

គ. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ យើងតាង $u = 1 + x^2$ ឬ $u' = 2x$

$f(x) = \sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$f(x) = \sqrt{1+x^2}$ យើងបាន $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

ឃ. $f(x) = x(x + \sqrt{1+x^2})$ យើងប្រើរូបមន្ត $((uv)' = u'v + uv')$

$$v = x + \sqrt{1+x^2} \Rightarrow v' = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = 1\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + x\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}} = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = cos^2x$ ខ. $g(x) = cos(x^2)$

គ. $h(x) = cos^2(x^2)$ ឃ. $k(x) = x^2cos(3x+1)$

ចម្លើយ

ក. $f(x) = cos^2x$ មានរាង $u^2(x)$ ដោយ $u(x) = cosx$

គេបាន $\left(u^2\right)' = 2uu'$

$$f'(x) = 2u(x).u'(x) = 2cosx(-sinx) = -2sinxcosx$$

$$= -sin2x$$

ខ. $g(x) = cos(x^2)$ មានរាង $cos\big(v(x)\big)$ដោយ $v(x) = x^2$

តាមដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់យើងបាន

$$g'(x) = [cos'v(x)] \times v'(x) = \left[-sin\big(v(x)\big)\right] \times 2x$$

$$= -sin\left(x^2\right) \times 2x = -2xsin\left(x^2\right)$$

គ. $h(x) = cos^2\left(x^2\right) = \left[cos\left(x^2\right)\right]^2 = [g(x)]^2$

ក្នុងសំណួរ ខ យើងបាន $g'(x) = -2xsin(x^2)$

$$h'(x) = 2g(x).g'(x) = 2cos\left(x^2\right)[-2xsin(x^2)]$$

$$= -2x[2sin(x^2)cos(x^2)]$$

$$= -2xsin(2x^2)$$

ឃ. $k(x) = x^2cos(3x+1)$

យើងប្រើរូបមន្ត $(uv)' = u'v + uv'$ និង $(cosu)' = -u'sinu$

$$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$$

$$v = cosu \Rightarrow v' = -3sin(3x+1)$$

$$f'(x) = 2x \cdot cos(3x+1) + x^2[-3sin(3x+1)]$$

$$= 2xcos(3x+1) - 3x^2sin(3x+1)$$

3.គណនា ដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(x) = e^x + 1 - xe^x$ ខ. $g(x) = \frac{10x}{e^x+1}$

គ. $h(x) = -x + 1 - 2lnx$ ឃ. $k(x) = \frac{x+lnx}{x^2}$

ចម្លើយ

ក. $f(x) = e^x + 1 - xe^x$ យើងបាន $f'(x) = e^x - (1 \cdot e^x + xe^x) = -xe^x$

ខ. $g(x) = \frac{10x}{e^x+1}$ នោះ $g'(x) = \frac{10(e^x+1)-10x(e^x)}{(e^x+1)^2}$

ដូច្នេះ $g'(x) = \frac{10(e^x+1-xe^x)}{(e^x+1)^2}$

គ. $h(x) = -x + 1 - 2lnx$ យើងបាន $h'(x) = -1 - \frac{2}{x} = \frac{-x-2}{x}$

ឃ. $k(x) = \frac{x+lnx}{x^2}$ យើងប្រើរូបមន្ត $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$k'(x) = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2-2x(x+lnx)}{x^4} = \frac{x+1-2x-2lnx}{x^3} = \frac{-x+1-2lnx}{x^3}$$

4.គណនាដេរីវេបន្តបន្ទាប់នៃអនុគមន៍ $f(x) = (3x+4)^5$

ចម្លើយ

យើងឃើញ $f(x) = (u(x))^5$ ដោយ $u(x) = 3x + 4$ និង $u'(x) = 3$

$$f'(x) = 5(u(x))^4u'(x) = 5(3x+4)^4 \times 3$$

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = 4 \times 5(3x+4)^3 \times 3^2$$

$$f^3(x) = 3 \times 4 \times 5(3x+4)^2 \times 3^3$$

$$f^4(x) = 2 \times 3 \times 4 \times 5(3x+4) \times 3^4$$

$$f^5(x) = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 3^5 = 5! \times 3^5$$

$$f^6(x) = 0$$

ចំពោះ $n > 5$ $\quad f^n(x) = 0$

5. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = ln(\frac{3x+1}{x-1})$

ចម្លើយ

$f(x) = ln(\frac{3x+1}{x-1})$ យើងតាង $u(x) = \frac{3x+1}{x-1}$

យើងបាន $f(x) = ln\left(u(x)\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$$u(x) = \frac{3x+1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{3(x-1)-(3x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-4}{(x-1)^2}}{\frac{3x+1}{x-1}} = \frac{-4}{(3x+1)(x-1)}$$

6. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(x) = xe^x$ ខ. $g(x) = x^3e^x$

គ. $h(x) = \frac{e^x}{x^2}$ ឃ. $k(x) = \frac{x}{e^x}$

ង. $l(x) = x^2e^{-x}$ ច. $f(x) = e^{(1-\frac{1}{x})}$

ចម្លើយ

ក. $f(x) = xe^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x)$

ខ. $g(x) = x^3e^x \Rightarrow \quad g'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x = x^2e^x(3+x)$

គ. $h(x) = \frac{e^x}{x^2} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = \frac{x^2e^x - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{xe^x(x-2)}{x^4}$

ដូច្នេះ $h'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$

ឃ. $k(x)=\frac{x}{e^x} \quad \Rightarrow \quad k'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2}$

ដូច្នេះ $k'(x)=\frac{1-x}{e^x}$

ង. $l(x)=x^2e^{-x} \;\Rightarrow\; l'(x)=2xe^{-x}+x^2(-e^{-x})$

$=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$

$=xe^{-x}(2-x)$

ដូច្នេះ $l'(x)=xe^{-x}(2-x)$

ច. $f(x)=e^{(1-\frac{1}{x})}$ យើងតាង $u(x)=1-\frac{1}{x}$ និង $u'(x)=\frac{1}{x^2}$

$f(x)=e^{u(x)} \;\Rightarrow\; f'(x)=u'(x)e^{u(x)}=\frac{1}{x^2}e^{(1-\frac{1}{x})}$

7. បើ $f(x)=x^3-x^2+2x-1$ កំណត់ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$

ដែល វាយកតម្លៃ 4 ចំពោះ $x=1$ ។

ព្រីមីទីវទូទៅ $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2-x+k$

$F(1)=4=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1-1+k$ យើងបាន $k=\frac{49}{12}$

ដូច្នេះព្រីមីទីវត្រូវកំណត់គឺ $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2-x+\frac{49}{12}$

8. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ ខ. $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$

គ. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

ចម្លើយ

ក. $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ ព្រីមីទីវនៃ x^2 គឺ $\frac{x^3}{3}$

ព្រីមីទីវនៃ $\frac{1}{x^2}$ គឺ $\frac{-1}{x}$

យើងបានព្រីមីទីវនៃ $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+k$

ខ. $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ $u(x)=x-1 \;\Rightarrow\; u'(x)=1$

$f(x)=\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$ ដូច្នេះ $F(x)=-\frac{1}{u(x)}+k$

ឬ $F(x)=-\frac{1}{x-1}+k$

គ. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ យើងតាង $u(x)=1+x^2 \Rightarrow u'(x)=2x$

$f(x)=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

ដូច្នេះ $F(x)=\sqrt{1+x^2}+k$

9. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=\frac{2}{3-x}$ ខ. $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

គ. $f(x)=\frac{1}{x\cdot lnx}$ ឃ. $f(x)=\frac{lnx}{x}$

ចម្លើយ

ក. $f(x)=\frac{2}{3-x}$ តាង $u(x)=3-x$ និង $u'(x)=-1$

$f(x)=-2\times\frac{u'(x)}{u(x)}$

ដូច្នេះ ព្រីមីទីវ នៃ $f(x)$ គឺ $F(x)=-2ln|3-x|+k$

ចំពោះ $x\in]3,+\infty[$; $|3-x|=x-3$ គេអាចបាន

$F(x)=-2ln(x-3)+k$

ខ.$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$ យើងតាង $u(x)=x^2+x+1$ និង $u'(x)=2x+1$

$f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ ដូច្នេះ ព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ គឺ $F(x)=ln|x^2+x+1|+k$

តែចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}, x^2+x+1>0$

ដូច្នេះ $F(x)=ln(x^2+x+1)+k$

គ. $f(x)=\frac{1}{xlnx}$ តាង $u(x)=lnx$ និង $u'(x)=\frac{1}{x}$

$f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ ដូច្នេះ ព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ គឺ $F(x)=ln[|lnx|]+k$

$x \in]1, +\infty[$, $lnx > 0$ ដូច្នេះ $F(x) = ln[lnx] + k$

$x \in]0, 1[$, $lnx < 0$ ដូច្នេះ $F(x) = ln[-lnx] + k$

ឃ. $f(x) = \frac{lnx}{x}$ តាង $u(x) = lnx$ និង $u'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = u'(x)u(x)$ យើងបាន $F(x) = \frac{1}{2}(lnx)^2 + k$

10. គណនាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(x) = e^{(-2x-1)}$

ខ. $f(x) = (2x+1)e^{(x^2+x)}$

គ. $f(x) = xe^{(x^2+3)}$

ចម្លើយ

ក. $f(x) = e^{(-2x-1)}$ តាង $u(x) = -2x - 1$ និង $u'(x) = -2$

$f(x) = -\frac{1}{2}u'(x) \cdot e^{u(x)}$ ដូច្នេះ ព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ គឺ

$F(x) = -\frac{1}{2}e^{(-2x-1)} + k$

ខ. $f(x) = (2x+1)e^{(x^2+x)}$ តាង $u(x) = x^2 + x$ និង $u'(x) = 2x + 1$

យើងបាន $f(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$ ដូច្នេះ ព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ គឺ

$F(x) = e^{(x^2+x)} + k$

គ. $f(x) = xe^{(x^2+3)}$ តាង $u(x) = x^2 + 3$ និង $u'(x) = 2x$

យើងបាន $f(x) = \frac{1}{2}u'(x) \cdot e^{u(x)}$

ដូច្នេះ ព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ គឺ $F(x) = \frac{1}{2}e^{(x^2+3)} + k$

ចំនួនកុំផ្លិច

I. មេរៀនសង្ខេប

-ចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ ហៅថាទម្រង់ពីជគណិតនៃចំនួនកំផ្លិច។

a ហៅថាផ្នែកពិត ហើយ b ហៅថាផ្នែកនិមិត្ត ដែល a និង b ជា

ចំនួនពិត និង $i^2 = -1$ ។

-បើ $z_1 = a_1 + ib_1$ និង $z_2 = a_2 + ib_2$ នោះគេបាន

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a_1 = a_2)$ និង $(b_1 = b_2)$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$

-ចំនួនកំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ តាងដោយ $\bar{z} = a - ib$

-ចំនួនកំផ្លិចផ្ទុយនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ តាងដោយ $-\bar{z} = -a - ib$

-បើគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ នោះម៉ូឌុលនៃ z តាងដោយ

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

-បើ z ជាចំនួនកុំផ្លិចនោះ $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

-បើ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចនោះគេបាន $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

-វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z តាង φ ជាមុំតូចបំផុតនៃ $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$

φ ហៅថាអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z ។ ដើម្បីគណនាមុំ φ យើងត្រូវដោះ

ស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{r} \\ sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{r} \end{cases}$$

$z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ ហៅថាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + ib$

-បើ $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_2)$ និង $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$ នោះគេបាន

$z_1z_2 = r_1r_2[cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)]$

$z^n = [r(cos\varphi + isin\varphi)]^n = r^n[cos(n\varphi) + isin(n\varphi)]$; n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

$(cos\varphi + isin\varphi)^n = cos(n\varphi) + isin(n\varphi)$ (ទ្រឹស្តីបទដឺម័រ)(Moivre)

-បើ $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ ជាចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យ ហើយ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

នោះ z មាន n ឬសទី n គឺ $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$

II.លំហាត់គំរូ

1.គណនា $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, z_1z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$

ក. $z_1 - 3$; $z_2 = 2 - i$ ខ. $z_1 = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$; $z_2 = -i\sqrt{2}$

គ. $z_1 = 2 - i\sqrt{3}$; $z_2 = 2 + i\sqrt{3}$

ចម្លើយ

ក. $z_1 + z_2 = -1 - i$

$z_1 - z_2 = -3 - (2 - i) = -3 - 2 + i = -5 + i$

$z_1z_2 = -3(2 - i) = -6 + i3$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3}{2-i} = \frac{-3(2+i)}{4-i^2} = \frac{-3(2+i)}{4+1} = \frac{-3}{5}(2 + i)$

$= -\frac{6}{5} - i\frac{3}{5}$

ខ. $z_1 = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$; $z_2 = -i\sqrt{2}$

$$z_1 + z_2 = \left(\sqrt{3} + i\sqrt{2}\right) + \left(-i\sqrt{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z_1 - z_2 = \left(\sqrt{3} + i\sqrt{2}\right) — i\sqrt{2} = \sqrt{3} + i\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{3} + i2\sqrt{2}$$

$$z_1 z_2 = \left(\sqrt{3} + i\sqrt{2}\right)\left(-i\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3}\right)\left(-i\sqrt{2}\right) + \left(i\sqrt{2}\right)\left(-i\sqrt{2}\right)$$

$$= -i\sqrt{6} - i^2\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 - i\sqrt{6}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)}{\left(-i\sqrt{2}\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)\left(-i\sqrt{2}\right)}{\left(-i\sqrt{2}\right)} = \frac{-i\sqrt{6}+\left(i\sqrt{2}\right)\left(-i\sqrt{2}\right)}{2i^2}$$

$$= \frac{\left(-i\sqrt{6}+2\right)}{-2} = -1 + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

គ. $z_1 = 2 - i\sqrt{3}$, $z_2 = 2 + i\sqrt{3}$

$$z_1 + z_2 = \left(2 - i\sqrt{3}\right) + \left(2 + i\sqrt{3}\right) = 4$$

$$z_1 - z_2 = \left(2 - i\sqrt{3}\right) - \left(2 + i\sqrt{3}\right) = -i2\sqrt{3}$$

$$z_1 z_2 = \left(2 - i\sqrt{3}\right)\left(2 + i\sqrt{3}\right) = 4 - i^2\left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$= 4 + 3 = 7$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\left(2-i\sqrt{3}\right)}{\left(2+i\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(2-i\sqrt{3}\right)\left(2-i\sqrt{3}\right)}{\left(2+i\sqrt{3}\right)\left(2-i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{4-2\times2\left(i\sqrt{3}\right)+\left(i\sqrt{3}\right)^2}{7} = \frac{4-i4\sqrt{3}-3}{7} = \frac{1-i4\sqrt{3}}{7}$$

$$= \frac{1}{7} - i\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

2.សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត $a + ib$

ក. $z = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$ ខ. $z = (3 + i)(5 - 2i)$

គ. $z = (4 - 7i)^3$ ឃ. $z = \frac{6-7i}{1+i}$

ចម្លើយ

ក. $z = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}$

$$= \frac{2+i4-2}{2+2} = i$$

facebook.com/moeys.gov.kh www.moeys.gov.kh google.com/+moeys

ខ. $z = (3+i)(5-2i) = 15 - 6i + 5i - 2i^2$

$= 17 - i$

គ. $z = (4-7i)^3$

យើងប្រើឯកលក្ខណៈភាព $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$z = (4-7i)^3 = 4^3 - 3\times 4^2 \times 7i + 3\times 4\times (7i)^2 - (7i)^3$

$= 64 - 336i - 588 + 343i$

យើងបាន $z = -524 + 7i$

ឃ. $z = \frac{6-7i}{1+i} = \frac{(6-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{6-6i-7i+7i^2}{1-i^2}$

$= \frac{-1-13i}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{13}{2}\cdot i$

3.សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. $z = \sqrt{3} + i$ ខ. $z = 1 + i$

គ. $z = 1 - i\sqrt{3}$ ឃ. $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ចម្លើយ

ក. $z = \sqrt{3} + i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$

យើងអាចទាញបាន $cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $sin\varphi = \frac{1}{2}$ ឬ $\varphi = \frac{\pi}{6}$

ដូច្នេះ $z = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$

យើងបាន z មានម៉ូឌុល 2 និង អាគុយម៉ង់ $\frac{\pi}{6}$

របៀបម្យ៉ាងទៀតតាមរូបមន្ត

$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

$cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{2}$ យើងបាន $\varphi = \frac{\pi}{6}$

ដូច្នេះ $z = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$

facebook.com/moeys.gov.kh www.moeys.gov.kh google.com/+moeys

ខ. $z = 1 + i$

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\begin{cases} cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$

ដូច្នេះ $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + sin\frac{\pi}{4}\right)$

គ. $z = 1 - i\sqrt{3}$

$r = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\begin{cases} cos\varphi = \frac{1}{2} \\ sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{3}$

ដូច្នេះ $z = 2[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)]$

ឃ. $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$\begin{cases} cos\varphi = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \\ sin\varphi = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$

ដូច្នេះ $z = cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}$

4. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z = \frac{z+2-i}{z+i}$

គេអោយ $z = a + ib$ និង $z \neq -i$

ក. សរសេររាងពីជគណិត Z ជាអនុគមន៍នៃ a និង b

ខ. រកទំនាក់ទំនងរវាង a និង b ដើម្បីអោយ Z ពិត

គ. រកទំនាក់ទំនងរវាង a និង b ដើម្បីអោយ Z និមិត្ត

ចម្លើយ

ក. សរសេររាងពីជគណិត Z ជាអនុគមន៍នៃ a និង b

$$Z=\frac{a+ib+2-i}{a+ib+i}=\frac{(a+2)+i(b-1)}{a+i(b+1)}$$

$$=\frac{[(a+2)+i(b-1)][a-i(b+1)]}{[a+i(b+1)][a-i(b+1)]}$$

$$=\frac{a(a+2)-i^2(b-1)(b+1)+ia(b-1)-i(a+2)(b+1)}{a^2+(b+1)^2}$$

$$=\frac{a(a+2)+(b-1)(b+1)}{a^2+(b+1)^2}+i\frac{-2(a+b+1)}{a^2+(b+1)^2}$$

ខ. Z ពិត លុះត្រាតែ ផ្នែកនិមិត្តស្មើ 0 ឬ $-2(a+b+1)=0$

និង $(a\neq 0$ និង $b\neq -1)$

ដូច្នេះ ទំនាក់ទំនងរវាង a និង b ដើម្បីអោយ Z ពិត គឺ

$a+b+1=0$ និង $(a\neq 0$ និង $b\neq -1)$

គ. Z និមិត្ត លុះត្រាតែ ផ្នែកពិតស្មើ 0 ឬ $a^2+b^2+2a-1=0$

និង $(a\neq 0$ និង $b\neq -1)$

ដូច្នេះ ទំនាក់ទំនងរវាង a និង b ដើម្បីអោយ Z និមិត្ត គឺ

$a^2+b^2+2a-1=0$ និង $(a\neq 0$ និង $b\neq -1)$

5. ក. ដោះស្រាយនៅក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការ $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$

យើងតាងដោយ z_1 ឬសរបស់សមីការដែលផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន

និង តាងដោយ z_2 ឬសមួយទៀត។

ខ. a.កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2

b.កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$

ចម្លើយ

ក. ដោះស្រាយនៅក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការ $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

$$\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 8 - 16 = -8 = (i\sqrt{8})^2 = (2i\sqrt{2})^2$$

$$z_1 = \frac{2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = \frac{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

ខ.a.កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់ z_1 និង z_2

$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $|z_1| = r_1 = \sqrt{2+2} = 2$

និង $\begin{cases} cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$

យើងបានទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $z_1 = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$; $|z_2| = r_2 = \sqrt{2+2} = 2$

និង $\begin{cases} cos\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{4}$

យើងបានទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $z_2 = 2\left(cos(-\frac{\pi}{4}) + sin(-\frac{\pi}{4})\right)$

b. កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1 - \theta_2) + isin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2}[cos\left(\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4})\right) + isin\left(\frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{4})\right)] = cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = \left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right)^2 = cos\pi + isin\pi$$

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ មានម៉ូឌុល $\left|\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2\right| = 1$ និង អាគុយម៉ង់ស្មើ π

6. កំណត់ $cos3\theta$ និង $sin3\theta$ ជាអនុគមន៍នៃ $cos\theta$ និង $sin\theta$។

ចម្លើយ

យើងប្រើទ្រឹស្តីបទដឺម័រ : $(cos\theta + isin\theta)^n = cos(n\theta) + isin(n\theta)$

$n = 3$ យើងបាន $(cos\theta + isin\theta)^3 = cos3\theta + isin3\theta$

ម្យ៉ាងទៀត $(cos\theta + isin\theta)^3 = cos^3\theta + 3icos^2\theta sin\theta$

$-3cos\theta sin^2\theta - isin^3\theta$

ព្រោះ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(cos\theta + isin\theta)^3 = (cos^3\theta - 3cos\theta sin^2\theta) + i(3cos^2\theta sin\theta - sin^3\theta)$

យើងបាន $cos3\theta = cos^3\theta - 3cos\theta sin^2\theta$

$= cos^3\theta - 3cos\theta(1 - cos^2\theta) = 4cos^3\theta - 3cos\theta$

$sin3\theta = 3cos^2\theta sin\theta - sin^3\theta = 3(1 - sin^2\theta)sin\theta - sin^3\theta$

$= 3sin\theta - 4sin^3\theta$

7. ក.គណនា i^n ចំពោះតម្លៃនៃចំនួនគត់រឺឡាទីប $n \geq 1$ ។

ខ.ទាញយកតម្លៃ i^{2014}

ចម្លើយ

ក. ចំពោះ $n = 1$ $\quad i = i$

ចំពោះ $n = 2$ $\quad i^2 = -1$

ចំពោះ $n = 3$ $\quad i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$

ចំពោះ $n = 4$ $\quad i^4 = i^3 \times i = -i^2 = 1$

ចំពោះ $n = 5$ $i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$

យើងឃើងមានខួបស្មើ 4 សម្រាបស្វីតនៃស្វ័យគុណរបស់ i

ដូច្នេះ បើ $n = 4k$ ចំពោះ k ជាចំនួនគត់រឺឡាទីបវិជ្ជមាននោះ $i^{4k} = 1$

បើ $n = 4k + 1$ ចំពោះ k ជាចំនួនគត់រឺឡាទីបវិជ្ជមាននោះ $i^{4k+1} = i$

បើ $n = 4k + 2$ ចំពោះ k ជាចំនួនគត់រឺឡាទីបវិជ្ជមាននោះ $i^{4k+2} = -1$

បើ $n = 4k + 3$ ចំពោះ k ជាចំនួនគត់រឺឡាទីបវិជ្ជមាននោះ $i^{4k+3} = -i$

ខ.ទាញយកពីលទ្ធផលខាងលើគណនា i^{2014}

តាមវិធីចែកអឺឃ្លីដ 2014 ដោយ 4 យើងបាន

$2014 = 503 \times 4 + 2$ ដូច្នេះ $i^{2014} = i^{4k+2}$ ដែល $k = 503$

វិបាក $i^{2014} = -1$

8.ដោះស្រាយនៅក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ សមីការ

$(E): (z^2 + 1)(z^2 + 2) = 0$

ដោយគិតដល់ $i^2 = -1$

$(E) \Leftrightarrow (z^2 - i^2)(z^2 - 2i^2) = 0$

$\Leftrightarrow (z - i)(z + i)(z + i\sqrt{2})(z - i\sqrt{2}) = 0$

យើងបានឬសរបស់សមីការ

$z_1 = i$; $z_2 = -i$; $z_3 = -i\sqrt{2}$; $z_4 = i\sqrt{2}$

9.គេកំណត់នៅក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ សមីការ

(E): $z^3 + 8 = 0$

ក.កំណត់ចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីអោយ

$z^3 + 8 = (z + 2)(z^2 - 2z + 4)$

(ប្រើឯកលក្ខណះភាព $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$)

$(z+2)(az^2+bz+c) = az^3+(b+2a)z^2+(c+2b)z+2c$

$z^3+8 = az^3+(b+2a)z^2+(c+2b)z+2c$

ដោយប្រដូចយើងបាន $\begin{cases} a=1 \\ b+2a=0 \\ c+2b=0 \\ 2c=8 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=4 \end{cases}$

$z^3+8=(z+2)(z^2-2z+4)$

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $z^3+8=0$

$$\begin{aligned} z^3+8=0 \quad &\Leftrightarrow \quad (z+2)(z^2-2z+4)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad z=-2 \text{ ឬ } z^2-2z+4=0 \\ &\Leftrightarrow \quad z=-2 \text{ ឬ } (z-1)^2=-3 \\ &\Leftrightarrow \quad z=-2 \text{ ឬ } (z-1)^2=\left(i\sqrt{3}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad z=-2 \text{ ឬ } z-1=i\sqrt{3} \text{ ឬ } z-1=-i\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \quad z=-2 \text{ ឬ } z=1+i\sqrt{3} \text{ ឬ } z=1-i\sqrt{3} \end{aligned}$$

ចម្លើយរបស់សមីការគឺ :

$z_1=-2 \quad ; \quad z_2=1+i\sqrt{3} \quad ; \quad z_3=1-i\sqrt{3}$

គ.សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ឬសរបស់សមីការ (E)

$$z_1=-2=2(-1+i\cdot 0)=2(cos\pi+isin\pi)$$

$$z_2=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_3=1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2[cos(-\tfrac{\pi}{3})+isin(-\tfrac{\pi}{3})]$$

កោនិក

I.មេរៀនសង្ខេប

1.ប៉ារ៉ាបូល

ក.សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

កំពូល	កំណុំ	បន្ទាត់ប្រាប់ទិស	សមីការស្តង់ដា	ពណ៌នា
$(0,0)$	$(p,0)$	$x=-p$	$y^2=4px$	• អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស • $p>0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x>0$ • $p<0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x<0$
$(0,0)$	$(0,p)$	$y=-p$	$x^2=4py$	• អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអរដោនេ • $p>0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y>0$ • $p<0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y<0$

ខ.សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលខុសពីគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

កំពូល	កំណុំ	បន្ទាត់ប្រាប់ទិស	សមីការស្តង់ដា	ពណ៌នា
(h,k)	$(h+p,k)$	$x=h-p$	$(y-k)^2=4p(x-h)$	• អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក • $p>0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x>0$ • $p<0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x<0$
(h,k)	$(h,k+p)$	$y=k-p$	$(x-h)^2=4p(y-k)$	• អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ • $p>0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y>0$ • $p<0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x<0$

2.អេលីប

ក.សមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

ផ្ចិត	អ័ក្សធំ	កំណុំ	កំពូល	សមីការស្តង់ដា
$(0,0)$	នៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស	$(\pm c,0)$	$(\pm a,0)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b>0$ ដែល $c^2=a^2-b^2$
$(0,0)$	នៅលើអ័ក្សអរដោនេ	$(0,\pm c)$	$(0,\pm a)$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $a>b>0$ ដែល $c^2=a^2-b^2$

ខ.សមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានកំពូលខុសពីគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

ផ្ចិត	អ័ក្សធំ	កំណុំ	កំពូល	សមីការស្តងដា
(h,k)	ជាអ័ក្សដេក	$(h\pm c,k)$	$(h\pm a,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $a>b>0$ ដែល $c^2=a^2-b^2$
(h,k)	ជាអ័ក្សឈរ	$(h,k\pm c)$	$(h,k\pm a)$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ $a>b>0$ ដែល $c^2=a^2-b^2$

3.អ៊ីពែបូល

ក.សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

ផ្ចិត	អ័ក្សទទឹង	កំណុំ	កំពូល	សមីការស្តង់ដា	អាស៊ីមតូត
$(0,0)$	នៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស	$(c,0)$ និង $(-c,0)$	$(a,0)$ និង $(-a,0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $c^2=a^2+b^2$	$y=\frac{b}{a}x$ និង $y=-\frac{b}{a}x$
$(0,0)$	នៅលើអ័ក្សអរដោនេ	$(0,c)$ និង $(0,-c)$	$(0,a)$ និង $(0,-a)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $c^2=a^2+b^2$	$y=\frac{a}{b}x$ និង $y=-\frac{a}{b}x$

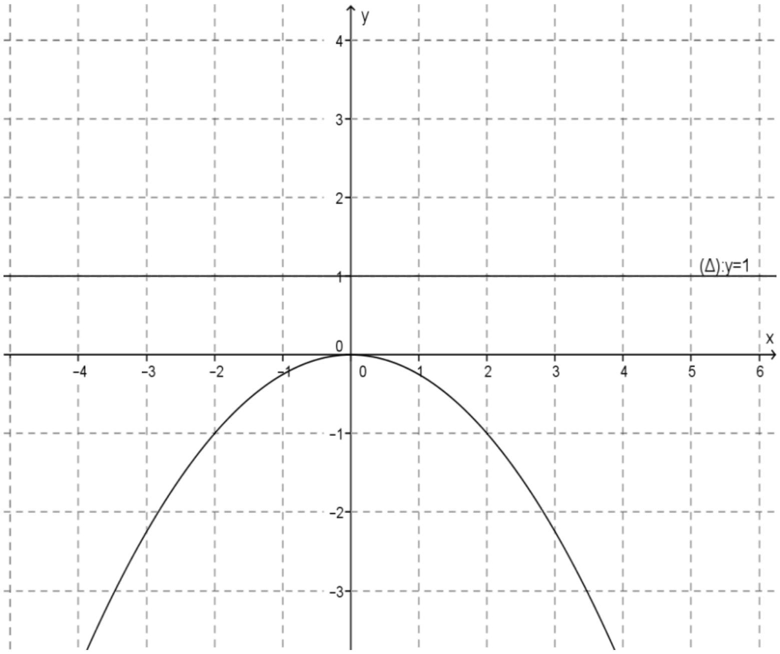
facebook.com/moeys.gov.kh www.moeys.gov.kh google.com/+moeys

ខ.សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតខុសពីគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

ផ្ចិត	អ័ក្សទទឹង	កំណុំ	កំពូល	សមីការស្តង់ដា	អាស៊ីមតូត
(h,k)	ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស	$(h+c,k)$ និង $(h-c,k)$	$(h+a,k)$ និង $(h-a,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $c^2=a^2+b^2$	$y=k+\frac{b}{a}(x-h)$ និង $y=k-\frac{b}{a}(x-h)$
(h,k)	ស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ	$(h,k+c)$ និង $(h,k-c)$	$(h,k+a)$ និង $(h,k-a)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ $c^2=a^2+b^2$	$y=k+\frac{a}{b}(x-h)$ និង $y=k-\frac{a}{b}(x-h)$

II.លំហាត់គំរូ

1.រកសមីការស្តងដារនៃ ប៉ារ៉ាបូល ដែលមាន កំណុំត្រង់ចំណុច $F(0,-1)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ ទិស $y=1$។



ចម្លើយ

កំណុំ F ស្ថិតនៅលើ អ័ក្សអរដោ នេនោះអ័ក្ស ឆ្លុះជាអ័ក្សអរដោនេ។ ដោយកំពូលស្ថិតនៅលើអ័ក្សឆ្លុះនិងជាចំណុច កណ្តាលរវាងកំណុំនិង ចំនុចប្រសព្វរវាង បន្ទាត់ប្រាប់ទិសនិងអ័ក្សឆ្លុះដែលចំណុចនេះមានកូអរដោនេ $(0,1)$ ។

យើងបានកំពូលជាគល់ អ័ក្សកូអរដោនេ ដូច្នេះប៉ារ៉ាបូល មានសមីការ $x^2=4py$, $F(0,p)=F(0,-1)\Rightarrow p=-1$ យើងបាន $x^2=-4y$ ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $(2,-1);(-2,-1)$ ។

2.ប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ និងកំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

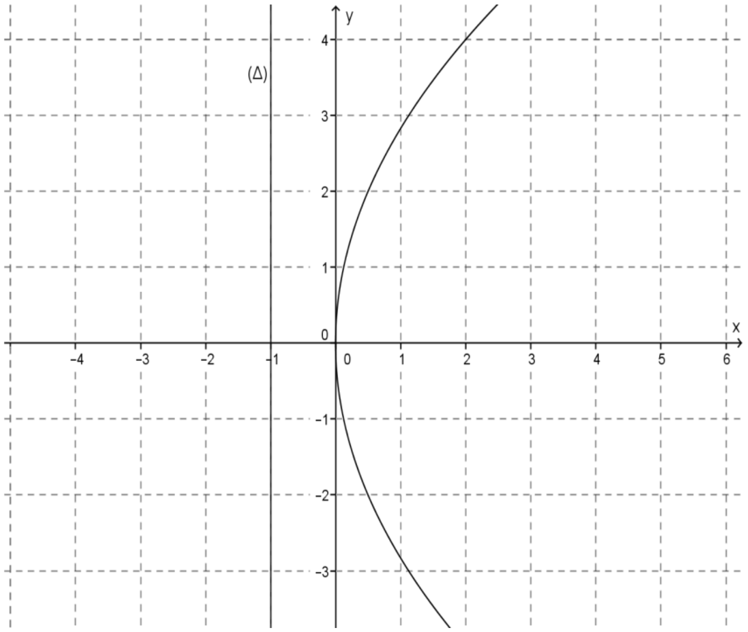
ក.រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលបើវាកាត់តាមចំណុច $A(8,8)$ ។

ខ.រកតម្លៃនៃ x_1 បើចំណុច $B(x_1,-4)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល។

ចម្លើយ

ក.ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូល $O(0,0)$ និងកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសនោះ អ័ក្សអាប់ស៊ីសជាអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល។ សមីការនៃប៉ារ៉ាបូលមានរាង $y^2=4px$, $A(8,8)$ នៅលើប៉ារ៉ាបូលយើងបាន

$8^2=4\times p\times 8\Rightarrow p=2$



ដូច្នេះ សមីការស្តងដារនៃប៉ារ៉ាបូលគឺ

$y^2=8x$, $F:(p,0)=(2,0)$

ខ.រកតម្លៃនៃ x_1

$B(x_1,-4)$ នៅលើប៉ារ៉ាបូលដែលមានសមីការ $y^2=8x_1\Rightarrow(-4)^2=8x_1$ ឬ $x_1=2$

3.រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $(2,1)$ និង កំណុំត្រង់ចំណុច $(4,1)$

ចម្លើយ

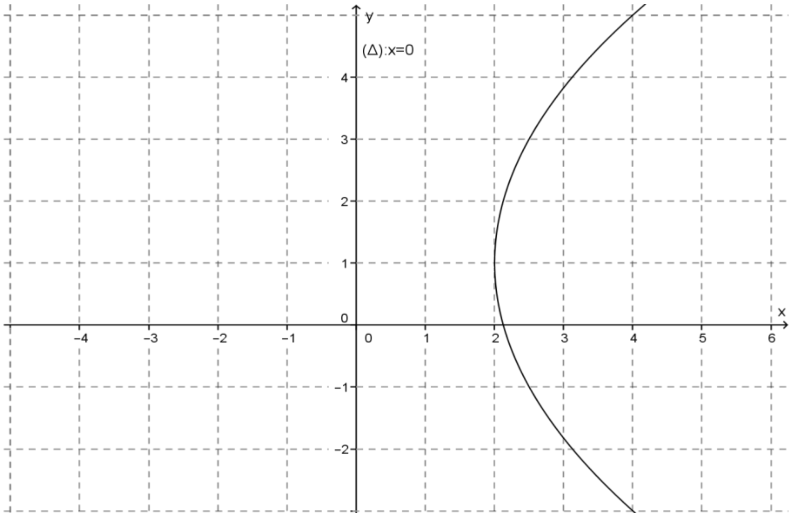
អ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល

ជាអ័ក្សដេក (កំពូលនិង

កំណុំមានអរដោនេដូចគ្នា)

យើងប្រើសមីការ :

$(y-k)^2=4p(x-h)$



កំពូល $V:(h,k)=(2,1)\Rightarrow h=2, k=1$

កំណុំ $F:(h+p,k)=(4,1)\Rightarrow h+p=4$

ឬ $p=2$

សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលនេះគឺ

$(y-1)^2=8(x-2)$

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=h-p=0$

4.រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានសមីការ

$(x-1)^2=4(y-3)$ ។

ចម្លើយ

សមីការនេះមានរាង : $(x-h)^2=4p(y-k)$ ដែលមានកំណុំមានកូ អរដោនេ $(h,k+p)$

កំពូល (h,k) និងបន្ទាត់ ប្រាប់ទិសមានសមីការ $y=k-p$ ដោយប្រៀបធៀប

$(x-1)^2=4(y-3)$ និងសមីការខាង លើយើងបាន $h=1, k=3, p=1$

កូអរដោនេកំពូល

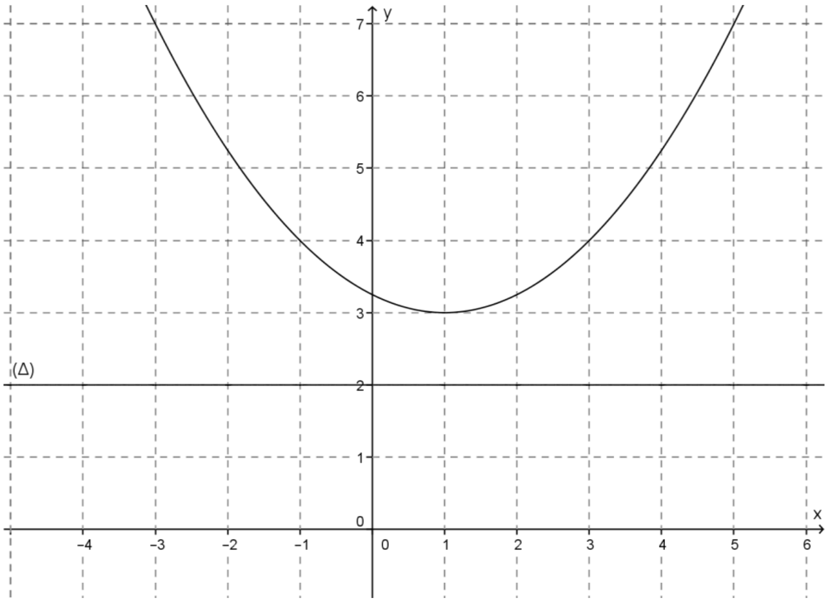
$(h,k)=(1,3)$

កូអរដោនេកំណុំ

$(h,k+p)=(1,4)$

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

$y=k-p=3-1=2$



5. រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានកំណុំមួយជាចំណុច $(1,0)$ និង ចំណុចកំពូលពីរនៅត្រង់ចំណុចពីរនៅត្រង់ចំណុច $(-2,0)$ និង $(2,0)$ រួចសង់អេលីបនោះ។

ចម្លើយ

ដោយកំពូលជា

ចំណុច $(-2,0)$ និង $(2,0)$

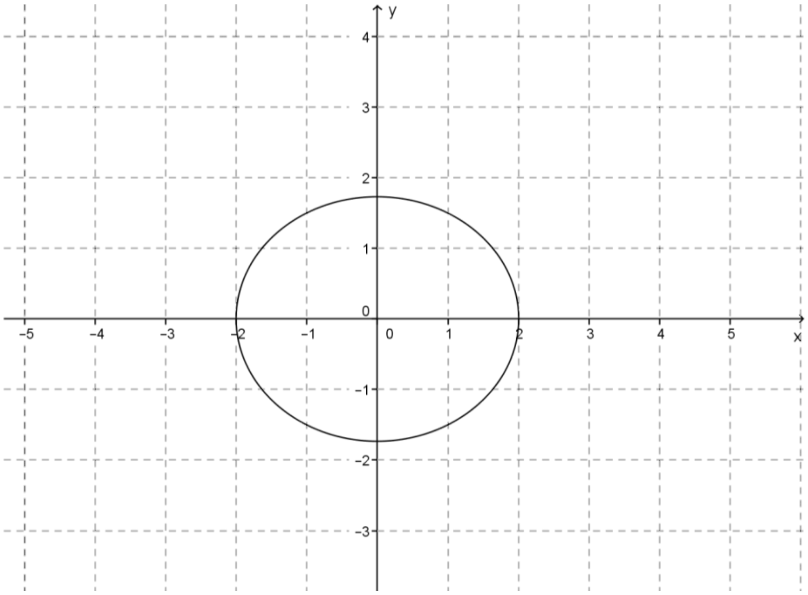
នោះផ្ចិតនៃអេលីបគឺ

គល់អ័ក្ស $O(0,0)$ ហើយ

អ័ក្សធំជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

$(a,0)=(2,0)\Rightarrow a=2$

$(c,0)=(1,0)\Rightarrow c=1$



$c^2 = a^2 - b^2$ ឬ $b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$

អេលីបមានសមីការ :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ឬ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

6.គេអោយសមីការ $36x^2 + 4y^2 = 36$

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ,អ័ក្សតូច,កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និង កូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរនៃអេលីប។

ខ. សង់អេលីបនោះ។

ចម្លើយ

ក. យើងចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការដោយ 36

យើងបាន $\frac{36x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = 1$ ឬ $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ វាមានរាង $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, $a > b > 0$

ជាសមីការអេលីប ដែលមានផ្ចិតជាគល់ អ័ក្សកូអរដោនេ និងមានអ័ក្សធំនៅលើអ័ក្ស អរដោនេ។ តាមសមីការនេះ យើងទាញបាន $a = 3$ និង $b = 1$ អ័ក្សធំប្រវែង $2a = 2\times 3 = 6$

និង អ័ក្ស តូចប្រវែង $2b = 2\times 1 = 2$

កំពូល ទាំងពីរមាន កូអរដោនេ $(0,3)$ និង $(0,-3)$ យើងបាន

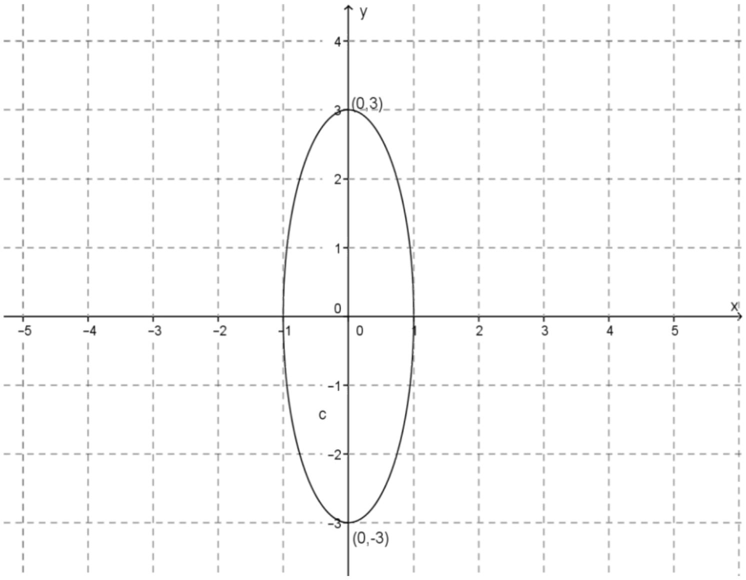
$c^2 = a^2 - b^2 = 3^2 - 1^2 = 8$

$c = 2\sqrt{2}$, កំណុំទាំងពីរ

មានកូអរដោនេ $\left(0, 2\sqrt{2}\right)$

និង $\left(0, -2\sqrt{2}\right)$

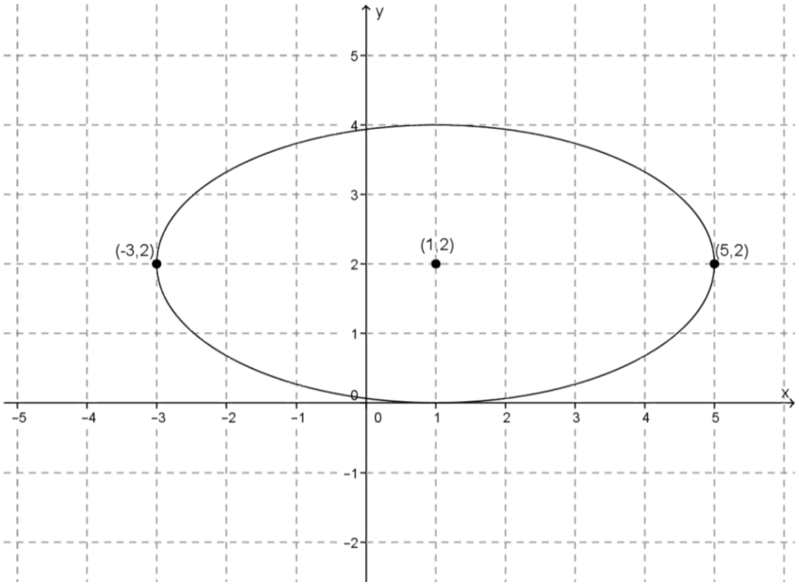
ខ.សង់អេលីបសមីការ $36x^2 + 4y^2 = 36$



7. រកសមីការនៃអេលីបដែលមានកំពូលទាំងពីរជាចំណុច $(-3,2)$ និង $(5,2)$ និង មាន

អ័ក្សតូចប្រវែង 4 ឯកតា។

ចម្លើយ



កំពូលទាំងពីរស្ថិតនៅលើប្លង់ដេកនោះអេលីបមានសមីការស្តង់ដា

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

ដោយផ្ចិតនៃអេលីបជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ភ្ជាប់កំពូលទាំងពីរនោះគេបានកូអរដោនេនៃផ្ចិតអេលីប :

$$\left(h=\frac{5+(-3)}{2},k=\frac{2+2}{2}\right) \text{ ឬ } (h=1,k=2)$$

ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a=\sqrt{(5-(-3))^2+(2-2)^2}=\sqrt{8^2}=8$

ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b=4\Rightarrow b=2$

ដូច្នេះ សមីការស្តង់ដានៃអេលីបគឺ $\frac{(x-1)^2}{4^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}=1$ ឬ $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

8. គេមានសមីការ $x^2-4y^2=16$

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល។

កំណត់កូអរដោនេកំពូល និង កូអរដោនេកំណុំ។

ខ. រកអាស៊ីមតូត។

គ.សង់អ៊ីពែបូល។

ចម្លើយ

ក.គេមាន $x^2-4y^2=16$ យើងចែកអង្គទាំងពីរដោយ16

យើងបាន $\frac{x^2}{16}-\frac{4y^2}{16}=1$ ឬ $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$

យើងបាន $a=4, b=2$

កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរគឺ $(4,0)$ និង $(-4,0)$

$c^2=a^2+b^2=16+4=20$ យើងបាន $c=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

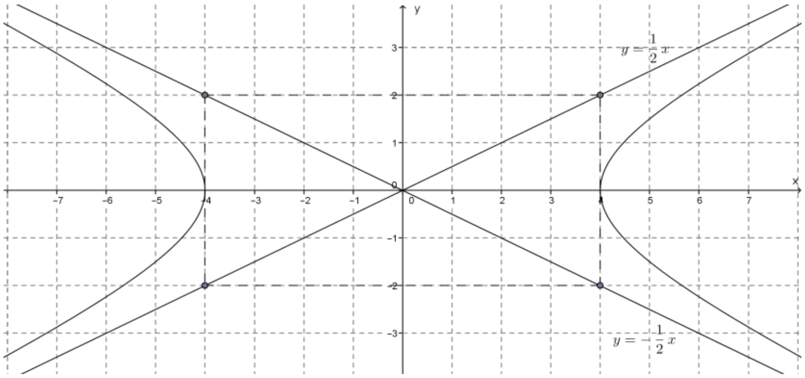
កូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរគឺ $\left(2\sqrt{5},0\right)$ និង $\left(-2\sqrt{5},0\right)$

ខ.សមីការអាស៊ីមតូត

$$y=\frac{b}{a}x \text{ និង } y=-\frac{b}{a}x$$

ដូច្នេះ $y=\frac{1}{2}x$ និង $y=-\frac{1}{2}x$

គ.សង់អ៊ីពែបូល



ដើម្បីសង់អ៊ីពែបូលគេ ដៅកំពូល និង គូសចតុកោណកែងដែលមាន បណ្តោយ 8 ឯកតា និងទទឹងប្រវែង 4 ឯកតាហើយផ្ចិតនៅគល់អ័ក្សកូអរដោនេ។ រួចយើងគូសអាស៊ីមតូតដោយបន្លាយអង្កត់ទ្រូងនៃចតុកោណកែងនេះ។ រួចយើងគូសអ៊ីពែបូល

9.គេអោយសមីការ $16y^2-4x^2=36$

ក.បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល។

កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល និង កំណុំរបស់អ៊ីពែបូល។

ខ.រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែបូល។

គ.សង់អ៊ីពែបូលនោះ។

ចម្លើយ

ក.យើងចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការ $16y^2-4x^2=36$ ដោយ 36

យើងបាន $\dfrac{16y^2}{36}-\dfrac{4x^2}{36}=1$ ឬ $\dfrac{4y^2}{9}-\dfrac{x^2}{9}=1$ ឬ $\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}-\dfrac{x^2}{3^2}=1$

ដូច្នេះវាមានរាង $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ ដែលជាសមីការអ៊ីពែបូលមានអ័ក្សទទឹងនៅលើអ័ក្ស

អរដោនេ យើងបាន $a=\dfrac{3}{2},b=3$ កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរគឺ $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ និង $\left(0,-\dfrac{3}{2}\right)$

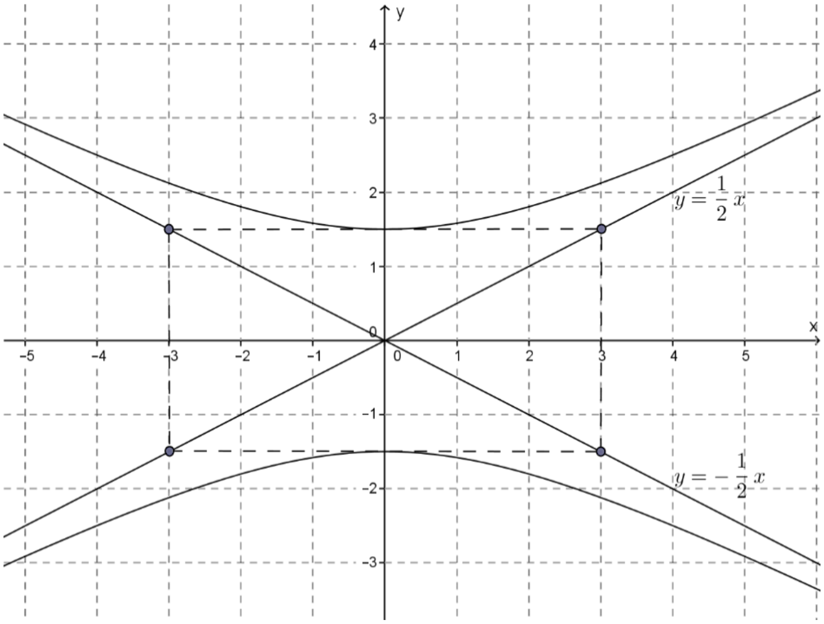
$$c^2=a^2+b^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+3^2=\frac{9}{4}+9=\frac{45}{4}=\frac{9}{4}\times 5$$

$c=\dfrac{3}{2}\sqrt{5}$ កូអរដោនេនៃកំណុំគឺ $\left(0,\dfrac{3}{2}\sqrt{5}\right)$ និង $\left(0,-\dfrac{3}{2}\sqrt{5}\right)$

ខ.សមីការអាស៊ីមតូត $y=\dfrac{a}{b}x=\dfrac{\frac{3}{2}}{3}x=\dfrac{1}{2}x$ ឬ $y=\dfrac{1}{2}x$

$$y=-\frac{a}{b}x=-\frac{\frac{3}{2}}{3}x=-\frac{1}{2}x \text{ ឬ } y=-\frac{1}{2}x$$

គ.ដើម្បីសង់អ៊ីពែបូល



យើងដៅកំពូលហើយ គូសចតុកោណកែង ដែលមានបណ្តោយ 6 ឯកតា និង ទទឹង 3 ឯកតាហើយមាន ផ្ចិតនៅគល់អ័ក្សកូអរដោនេ។គូសអង្កត់ទ្រូង និង បន្លាយអង្កត់ទ្រូងទាំងពីរយើងបានអាស៊ីម តូតទាំងពីររបស់អ៊ីពែបូលនោះ។

facebook.com/moeys.gov.kh www.moeys.gov.kh google.com/+moeys